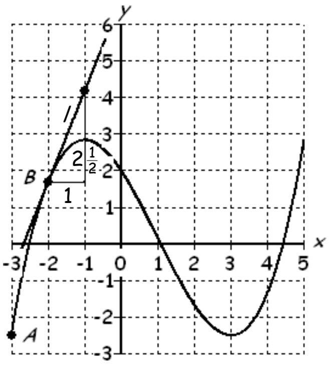
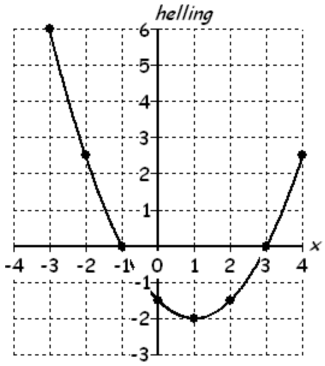




1a De raaklijn k gaat door $(-3;\ -2{,}5)$ en $(-2;\ 3{,}5)$.
Dus $\text{rc}_k = \frac{3{,}5 - -2{,}5}{-2 - -3} = \frac{3{,}5+2{,}5}{-2+3} = \frac{6}{1} = 6$.

1b Zie de raaklijn l in de figuur hiernaast met $\text{rc}_l \approx 2\frac{1}{2}$.

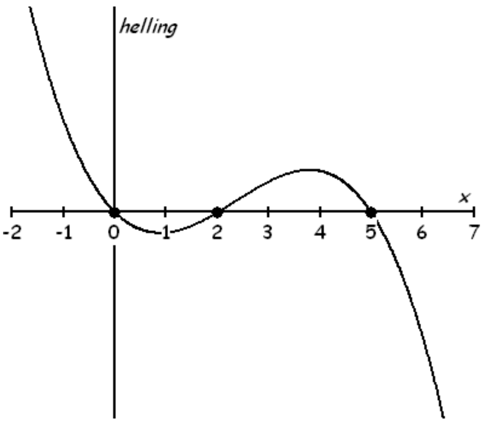
1c Zie de tabel hieronder. (doe dit als bij 1a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5	0	$-1{,}5$	-2	$-1{,}5$	0	2,5

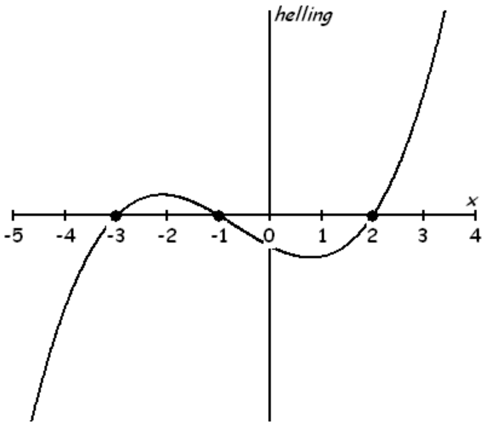
1d Zie de rechter grafiek (de hellinggrafiek van f) hiernaast.

2 Bij f hoort hellinggrafiek B. (f begint stijgend, dus met een positieve helling $\Rightarrow$ de hellinggrafiek van f begint boven de x-as)
Bij g hoort hellinggrafiek D. (g begint met dalen tot $x = 4 \Rightarrow$ hellinggrafiek van g begint onder de x-as te lopen tot aan $x = 4$)
Bij h hoort hellinggrafiek A. (h begint met dalen tot $x = 2\frac{1}{2} \Rightarrow$ hellinggrafiek van h begint onder de x-as te lopen tot aan $x = 2\frac{1}{2}$)
Bij k hoort hellinggrafiek C. (k begint met dalen tot $x \approx 1{,}3 \Rightarrow$ hellinggrafiek van k begint onder de x-as te lopen tot aan $x \approx 1{,}3$)

3a f stijgt voor $x < 0$ (dus de helling is positief)
(dus de hellinggrafiek van f boven de x-as voor $x < 0$)
f daalt voor $0 < x < 2$ (dus de helling is negatief)
(dus de hellinggrafiek van f onder de x-as voor $0 < x < 2$)
f stijgt voor $2 < x < 5$ (dus de helling is positief)
(dus de hellinggrafiek van f boven de x-as voor $2 < x < 5$)
f daalt voor $x > 5$ (dus de helling is negatief)
(dus de hellinggrafiek van f onder de x-as voor $x > 5$)
Zie een schets van de hellinggrafiek van f hieronder.



3b g daalt voor $x < -3$ (dus de helling is negatief)
(dus de hellinggrafiek van g onder de x-as voor $x < -3$)
g stijgt voor $-3 < x < -1$ (dus de helling is positief)
(dus de hellinggrafiek van g boven de x-as voor $-3 < x < -1$)
g daalt voor $-1 < x < 2$ (dus de helling is negatief)
(dus de hellinggrafiek van g onder de x-as voor $-1 < x < 2$)
g stijgt voor $x > 2$ (dus de helling is positief)
(dus de hellinggrafiek van g boven de x-as voor $x > 2$)
Zie een schets van de hellinggrafiek van g hieronder.



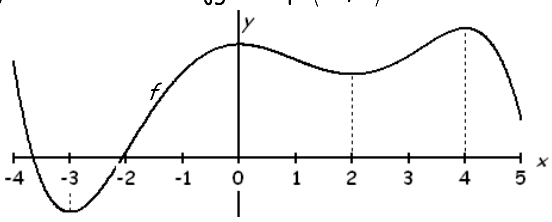
4a De hellinggrafiek van f ligt onder de x-as voor $x < -3 \Rightarrow$ de grafiek van f is dalend (voor $x < -3$ ofwel) op $\langle \leftarrow, -3 \rangle$.

4b De hellinggrafiek van f gaat in $x = -3$ door de x-as $\Rightarrow$ de grafiek van f heeft een top in $x = -3$.
De helling van f gaat in $x = -3$ over van negatief naar postief $\Rightarrow$ grafiek van f gaat hier over van dalen in stijgen.
Dus de top van de grafiek van f in $x = -3$ is een laagste punt.

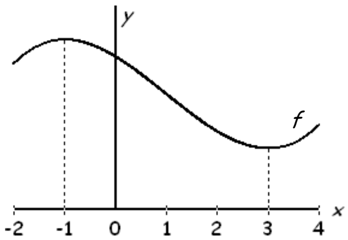
4c De hellinggrafiek van f ligt boven de x-as voor $-3 < x < 0 \Rightarrow$ de grafiek van f is stijgend op $\langle -3, 0 \rangle$.

4d De hellinggrafiek van f gaat in $x = 0$ door de x-as $\Rightarrow$
de grafiek van f heeft een top in $x = 0$.
De helling van f gaat in $x = 0$ over van positief naar negatief $\Rightarrow$
grafiek van f gaat hier over van stijgen in dalen.
Dus de top van de grafiek van f in $x = 0$ is een hoogste punt.

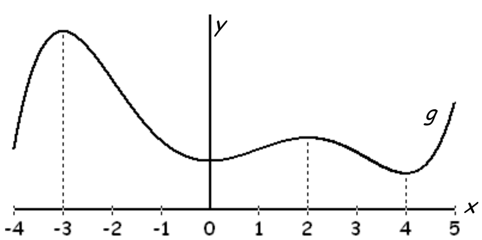
4e Zie een mogelijke grafiek van f hiernaast.



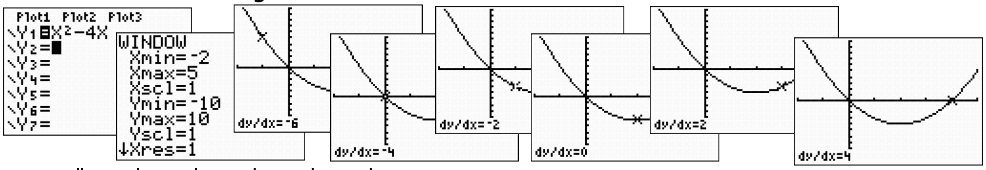
5a



5b

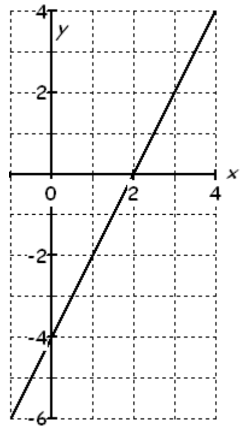


6a Zie de tabel met hellingen van f hieronder.

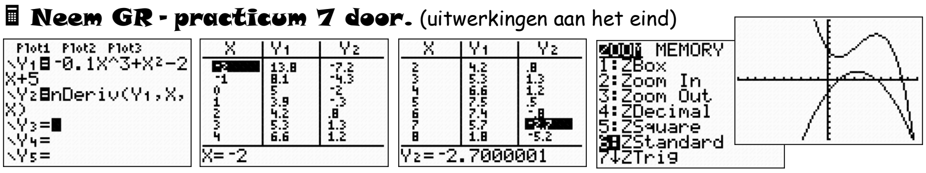


x	-1	0	1	2	3	4
helling	-6	-4	-2	0	2	4

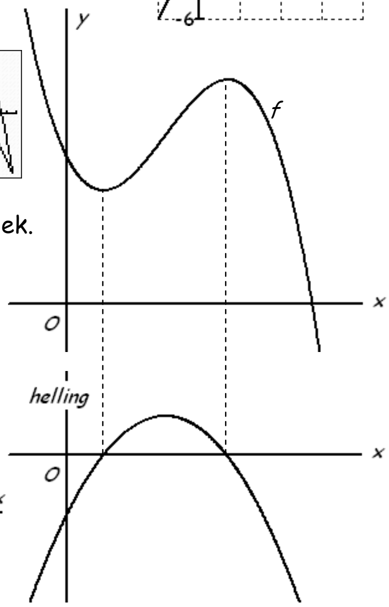
6b Zie de hellinggrafiek van f hiernaast.



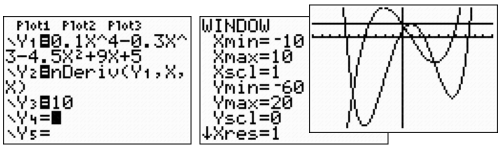
✱ ✱ ✱ **Neem GR - practicum 7 door.** (uitwerkingen aan het eind)

7a 

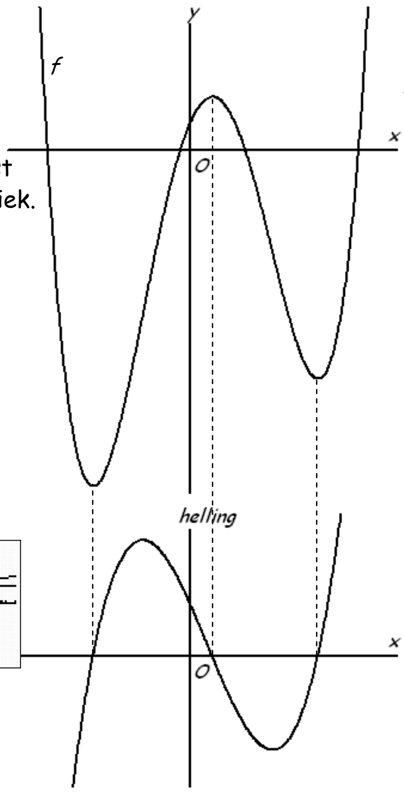
Zie een schets van de grafiek van f hiernaast en daaronder van zijn hellinggrafiek.
(gebruik eventueel een plot en TABLE op de GR)



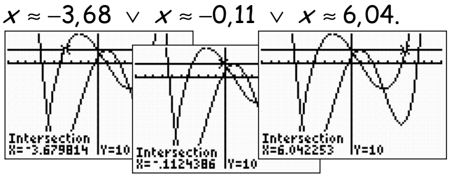
7b helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=7} = \text{nDeriv}(-0.1x^3 + x^2 - 2x + 5, x, 7) = y_2(7) = -2{,}7.$

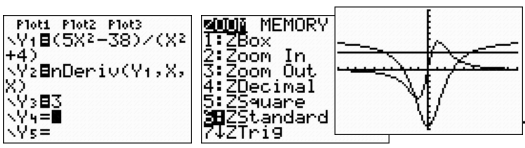
8a 

Zie een schets van de grafiek van f hiernaast
en daaronder een schets van zijn hellinggrafiek.
(gebruik eventueel een plot en TABLE op de GR)

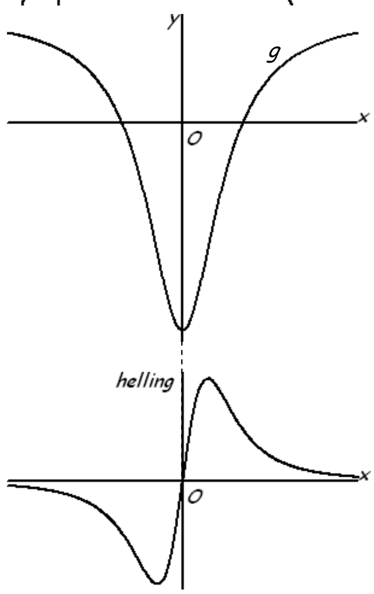


8b helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right] = y_2(x) = 10$
met de optie intersect geeft
$x \approx -3{,}68 \ \lor \ x \approx -0{,}11 \ \lor \ x \approx 6{,}04.$

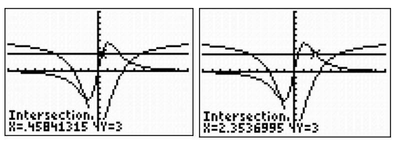


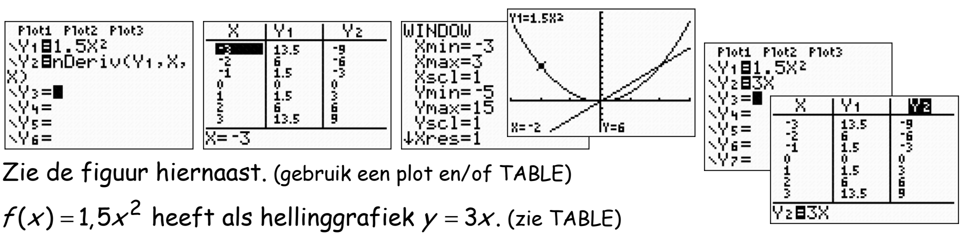
9a 

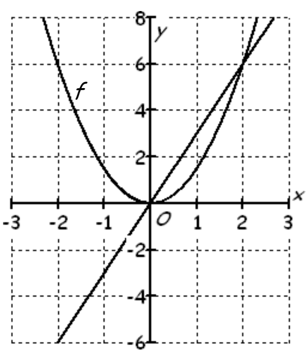
Zie een schets van de grafiek van g en
een schets van zijn hellinggrafiek hiernaast.
(gebruik eventueel een plot en TABLE op de GR)



9b helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right] = y_2(x) = 3$ met de optie
intersect geeft $x \approx 0{,}458 \ \lor \ x \approx 2{,}354.$
In een plot of de schets daarna aflezen:
de helling > 3 voor $0{,}458 < x < 2{,}354.$



10a 



Zie de figuur hiernaast. (gebruik een plot en/of TABLE)

10b $f(x) = 1{,}5x^2$ heeft als hellinggrafiek $y = 3x$. (zie TABLE)

11a De grafiek van $g(x) = 3x$ is een (rechte) lijn. De helling in elk punt (van deze lijn) is 3 (want de richtingscoëfficiënt is 3).

11b $g(x) = 3x$ heeft als hellinggrafiek $y = 3$ (een rechte lijn op hoogte 3).

12 De grafiek van $h(x) = -4$ is een horizontale lijn met helling $0 \Rightarrow h(x) = -4$ heeft als hellinggrafiek $y = 0$.

13a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 5x - 7 + 0 = 10x - 7$.

13b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot -2\frac{1}{2}x + 4 + 0 = -5x + 4$.

13c $h(x) = 0{,}02x^2 + 1{,}7x \Rightarrow h'(x) = 2 \cdot 0{,}02x + 1{,}7 = 0{,}04x + 1{,}7$.

13d $k(x) = 7x + 10 \Rightarrow k'(x) = 7 + 0 = 7$.

14a $f(x) = (2x - 7)(8 + x) = 16x + 2x^2 - 56 - 7x = 2x^2 + 9x - 56 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 2x + 9 + 0 = 4x + 9$.

14b $g(p) = -12p^2 + 30p \Rightarrow g'(p) = 2 \cdot -12p + 30 = -24p + 30$.

14c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t) = 100 - t^2 + 6t = -t^2 + 6t + 100 \Rightarrow V'(t) = 2 \cdot -t + 6 + 0 = -2t + 6$.

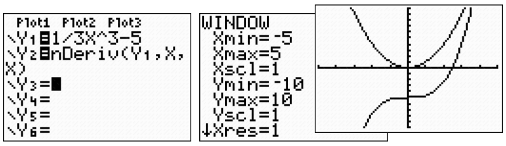
14d $K(q) = -0{,}01q^2 + 20q \Rightarrow K'(q) = 2 \cdot -0{,}01q + 20 = -0{,}02q + 20$.

15a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot -15x - 1 + 0 = -30x - 1$.

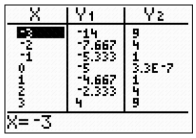
15b $g(x) = (3x + 6)^2 = (3x + 6)(3x + 6) = 9x^2 + 18x + 18x + 36 = 9x^2 + 36x + 36 \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot 9x + 36 + 0 = 18x + 36$.

15c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8 = 5(x - 3)(x - 3) + 5x - 5 + 8 = 5(x^2 - 3x - 3x + 9) + 5x + 3$
$= 5x^2 - 30x + 45 + 5x + 3 = 5x^2 - 25x + 48 \Rightarrow h'(x) = 2 \cdot 5x - 25 + 0 = 10x - 25$.

15d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7) = -3(5x - 2x^2 - 5 + 2x) - 8x + 56 = 6x^2 - 21x + 15 - 8x + 56 = 6x^2 - 29x + 71 \Rightarrow$
$k'(x) = 2 \cdot 6x - 29 + 0 = 12x - 29$.

16a 

16b $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5$ heeft als hellinggrafiek $g'(x) = x^2$ (zie TABLE hiernaast).



17a $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$.

17b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3{,}4 \Rightarrow g'(x) = -14x^6 - 15x^4$.

17c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12 \Rightarrow h'(t) = -t^2 + 13t$.

17d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3 \Rightarrow k'(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$.

18a $f(x) = 3(2x + 1)(2x + 1) = 3(4x^2 + 2x + 2x + 1) = 12x^2 + 12x + 3 \Rightarrow f'(x) = 24x + 12$.

18b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 21x^3 + 28x^2 - 28x \Rightarrow g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$.

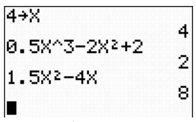
18c $h(x) = 3px^8 - px^4 \Rightarrow h'(x) = 24px^7 - 4px^3$.

18d $k(x) = x^3 + a \Rightarrow k'(x) = 3x^2$.

19a $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$.
$f(1) = 1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = 1 - 1 + 2 - 4 = -2$ en $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 3 - 2 + 2 = 3$

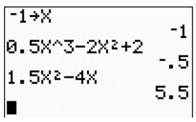
19bc $y_A = f(x_A) = f(1)$ en $rc_k = f'(x_A) = f'(1)$.

20a $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 1{,}5x^2 - 4x$.
Stel k: $y = ax + b$ met $y_A = f(4) = 2$ en $a = f'(4) = 8$.

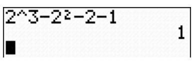


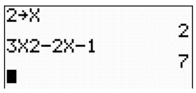
$\left.\begin{array}{l} y = 8x + b \\ \text{door } A(4, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = 8 \cdot 4 + b \Rightarrow 2 - 32 = b \Rightarrow b = -30$. De raaklijn in A aan (de grafiek van) f is k: $y = 8x - 30$.

20b Stel l: $y = ax + b$ met $y_B = f(-1) = -0{,}5$ en $a = f'(-1) = 5{,}5$.
$\left.\begin{array}{l} y = 5{,}5x + b \\ \text{door } B(-1;\ -0{,}5) \end{array}\right\} \Rightarrow -0{,}5 = 5{,}5 \cdot -1 + b \Rightarrow -0{,}5 + 5{,}5 = b \Rightarrow b = 5$.
Dus de raaklijn in B aan (de grafiek van) f is l: $y = 5{,}5x + 5$.



21a $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$.
$\left.\begin{array}{l} y = 7x + b \\ \text{door } A(2, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 7 \cdot 2 + b \Rightarrow 1 - 14 = b \Rightarrow b = -13$. De raaklijn in A is k: $y = 7x - 13$.



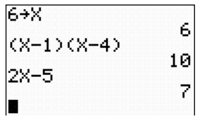


21b (De grafiek van) f snijden met de y-as $(x=0) \Rightarrow x_B = 0$ en $y_B = f(0) = 0^3 - 0^2 - 0 - 1 = -1$.
Stel l: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1$.
$\left.\begin{array}{l} y = -x + b \\ \text{door } B(0,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = -1 \cdot 0 + b \Rightarrow b = -1$. De raaklijn in B is l: $y = -x - 1$.

22a (De grafiek van) g snijden met de x-as $(y=0) \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 2x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3 = x_A$.
Dus $x_A = 3$ en $y_A = 0$ (er is gegeven dat A op de x-as ligt $\Rightarrow y = 0$).

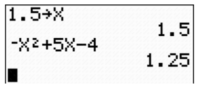
22b $g(x) = 2x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = 4x - 6$. Stel nu l: $y = ax + b$ met $a = g'(3) = 4 \cdot 3 - 6 = 12 - 6 = 6$.
$\left.\begin{array}{l} y = 6x + b \\ \text{door } A(3,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 6 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -18$. De raaklijn in A is l: $y = 6x - 18$.

23a $h(x) = (x-1)(x-4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow h'(x) = 2x - 5$.
Stel k: $y = ax + b$ met $y_A = h(6) = 10$ en $a = h'(6) = 7$.
$\left.\begin{array}{l} y = 7x + b \\ \text{door } A(6,10) \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = 7 \cdot 6 + b \Rightarrow 10 - 42 = b \Rightarrow b = -32$. De raaklijn is k: $y = 7x - 32$.



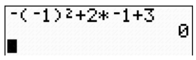
23b h snijden met de y-as $(x=0) \Rightarrow x_B = 0$ en $y_B = h(0) = (0-1)(0-4) = -1 \cdot -4 = 4$.
Stel l: $y = ax + b$ met $a = h'(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$.
$\left.\begin{array}{l} y = -5x + b \\ \text{door } B(0,4) \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = -5 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$. De raaklijn in B is l: $y = -5x + 4$.

23c h snijden met de x-as $(y=0) \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 4$.
Stel de raaklijn in $(1,0)$ m: $y = ax + b$ met $a = h'(1) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$.
$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } (1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 3$. De raaklijn in $(1,0)$ is m: $y = -3x + 3$.
Stel de raaklijn in $(4,0)$ n: $y = ax + b$ met $a = h'(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$.
$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ \text{door } (4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3 \cdot 4 + b \Rightarrow b = -12$. De raaklijn in $(4,0)$ is n: $y = 3x - 12$.

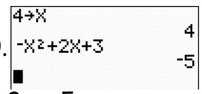


24a $h(x) = -x^2 + 5x - 4 \Rightarrow h'(x) = -2x + 5$.

24b $\text{rc}_k = 2 \Rightarrow h'(x) = 2 \Rightarrow -2x + 5 = 2 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-2} = 1{,}5 = x_A$ en $y_A = h(1{,}5) = -1{,}5^2 + 5 \cdot 1{,}5 - 4 = 1{,}25$.

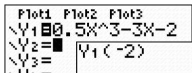


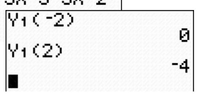
25a $f(x) = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = -2x + 2$.
$\text{rc}_{\text{raaklijn}} = 4 \Rightarrow -2x + 2 = 4 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 = x_A$ en $y_A = f(-1) = -(-1)^2 + 2 \cdot -1 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$.



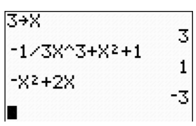
25b $\text{rc}_{\text{raaklijn}} = \text{rc}_k = -6 \Rightarrow -2x + 2 = -6 \Rightarrow -2x = -8 \Rightarrow x = 4 = x_B$ en $y_B = f(4) = -4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = -16 + 8 + 3 = -5$.

26 $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 1{,}5x^2 - 3$.
$\text{rc}_{\text{raaklijn}} = 3 \Rightarrow 1{,}5x^2 - 3 = 3 \Rightarrow 1{,}5x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{1{,}5} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow x = -2 \vee x = 2$.
$x_A = -2$ geeft $y_A = f(-2) = 0$ en $x_B = 2$ geeft $y_B = f(2) = -4$. Dus $A(-2,0)$ en $B(2,\ -4)$.

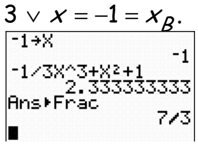




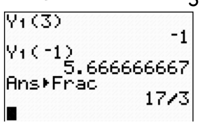
27a $y_A = f(3) = -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 1 = -9 + 9 + 1 = 1$.
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 2x$. Stel l: $y = ax + b$ met $a = f'(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -9 + 6 = -3$.
$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } A(3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -3 \cdot 3 + b \Rightarrow 1 + 9 = b \Rightarrow b = 10$. De raaklijn is l: $y = -3x + 10$.



27b $\text{rc}_m = \text{rc}_l = -3 \Rightarrow -x^2 + 2x = -3 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -1 = x_B$.
$x_B = -1$ geeft $y_B = f(-1) = 2\frac{1}{3}$. Dus $B(-1, 2\frac{1}{3})$.
$\left.\begin{array}{l} m\text{: } y = -3x + b \\ \text{door } B(-1, 2\frac{1}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\frac{1}{3} = -3 \cdot -1 + b \Rightarrow 2\frac{1}{3} - 3 = b \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$. De raaklijn is m: $y = -3x - \frac{2}{3}$.

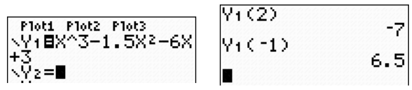


28a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 2$.
$\text{rc} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x_A = 3$ met $y_A = -1 \vee x_B = -1$ met $y_B = f(-1) = 5\frac{2}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} m\text{: } y = x + b \\ \text{door } A(3,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = 3 + b \Rightarrow b = -4$. De raaklijn in $A(3,\ -1)$ is m: $y = x - 4$.
$\left.\begin{array}{l} n\text{: } y = x + b \\ \text{door } B(-1, 5\frac{2}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow 5\frac{2}{3} = -1 + b \Rightarrow b = 6\frac{2}{3}$. De raaklijn in $B(-1, 5\frac{2}{3})$ is n: $y = x + 6\frac{2}{3}$.



28b $f'(x) = -4 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = -4 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$ met $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 < 0$.
Dus $f'(x) = -4$ heeft geen oplossing(en) en daarom heeft de grafiek van f ook geen raaklijn(en) met rc $= -4$.

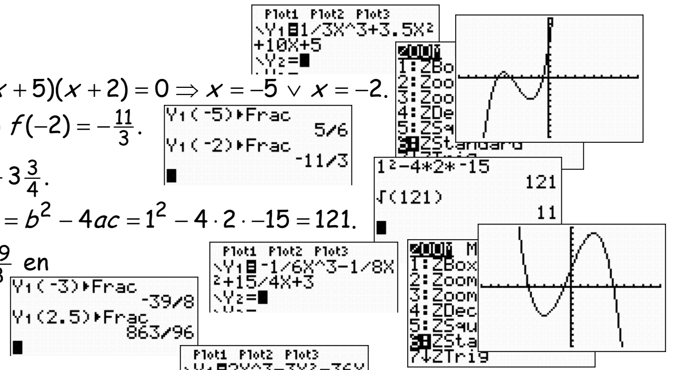
29a In A en B is de raaklijn horizontaal $\Rightarrow \text{rc}_{\text{raaklijn}} = 0 \Rightarrow$ helling $f'(x) = 0$.
$f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$.
$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x_B = 2$ met $y_B = -7 \vee x_A = -1$ met $y_A = f(-1) = 6\frac{1}{2}$.



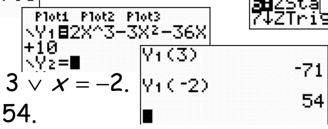
29b $y = 0x + b$ (dus $y = b$) door $A(-1, 6\frac{1}{2})$. De (horizontale) raaklijn in $A(-1, 6\frac{1}{2})$ is $y = 6\frac{1}{2}$.
$y = b$ door $B(2, -7)$. De (horizontale) raaklijn in $B(2, -7)$ is $y = -7$.

30a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3\frac{1}{2}x^2 + 10x + 5 \Rightarrow f'(x) = x^2 + 7x + 10$.
extreme waarden: $f'(x) = 0$, dus $x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x+5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = -5 \vee x = -2$.
maximum (zie een plot) $f(-5) = \frac{5}{6}$ en minimum (zie een plot) $f(-2) = -\frac{11}{3}$.

30b $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 3\frac{3}{4}x + 3 \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4}$.
$g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0$ met $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -15 = 121$.
$x = \frac{-1-11}{2 \cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3$ geeft minimum (zie plot) $g(-3) = -\frac{39}{8}$ en
$x = \frac{-1+11}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ geeft maximum (zie plot) $g(\frac{5}{2}) = \frac{863}{96}$.



31a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$.
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$.
minimum (zie figuur 6.20) $f(3) = -71$ en maximum (zie figuur 6.20) $f(-2) = 54$.



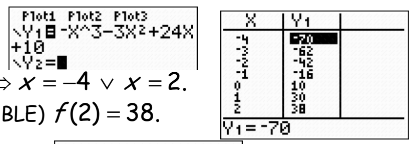
31b $f(x) = 25$ (de grafiek van $y = 25$ is een horizontale lijn tussen beide toppen in) heeft drie oplossingen.
$f(x) = 75$ (de grafiek van $y = 75$ is een horizontale lijn boven beide toppen) heeft één oplossing.

31c $f(x) = p$ heeft drie oplossingen ($\Rightarrow$ de horizontale lijn $y = p$ loopt tussen beide toppen in) voor $-70 < p < 54$.

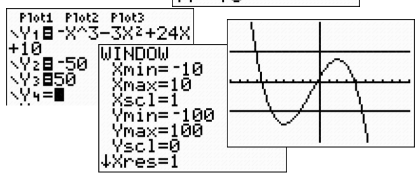
31d $f(x) = p$ heeft één oplossing ($\Rightarrow$ de lijn $y = p$ snijdt de grafiek van $f(x)$ in één punt) voor $p < -70 \vee p > 54$.

31e $f(x) = p$ heeft twee oplossingen ($\Rightarrow$ de lijn $y = p$ raakt de grafiek van f in een top) voor $p = -70 \vee p = 54$.

32a $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 24x + 10 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 - 6x + 24$.
$f'(x) = -3x^2 - 6x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 2$.
minimum (zie een plot/TABLE) $f(-4) = -70$ en maximum (zie een plot/TABLE) $f(2) = 38$.

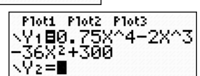


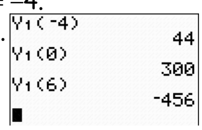
32b $f(x) = -50$ (ligt tussen het minimum en maximum in) heeft drie oplossingen.
$f(x) = 50$ (ligt boven het maximum) heeft één oplossing.



32cd $f(x) = p$ heeft drie oplossingen voor $-70 < p < 38$.
$f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p < -70 \vee p > 38$.
($f(x) = p$ heeft twee oplossingen voor $p = -70 \vee p = 38$)

33a $f(x) = 0{,}75x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 300 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 - 6x^2 - 72x$.
$f'(x) = 3x^3 - 6x^2 - 72x = 0 \Rightarrow 3x(x^2 - 2x - 24) = 0 \Rightarrow 3x(x-6)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 6 \vee x = -4$.
minimum (zie schets) $f(-4) = 44$, maximum (zie schets) $f(0) = 300$ en minimum (zie schets) $f(6) = -456$.





33b $f(x) = p$ heeft vier oplossingen (zie de schets en gebruik de berekende extremen) voor $44 < p < 300$.
$f(x) = p$ heeft drie oplossingen (zie de schets) voor $p = 44 \vee p = 300$.
$f(x) = p$ heeft twee oplossingen (zie de schets) voor $-456 < p < 44 \vee p > 300$.
$f(x) = p$ heeft één oplossing (zie de schets) voor $p = -456$.
$f(x) = p$ heeft geen oplossingen (zie de schets) voor $p < -456$.

34a $2 \cdot 2 + BC = 18 \Rightarrow BC = 14$ (m). $O(\text{terras}) = 14 \cdot 2 = 28$ (m²).

34b $2 \cdot 5 + BC = 18 \Rightarrow BC = 8$ (m). $O(\text{terras}) = 8 \cdot 5 = 40$ (m²).

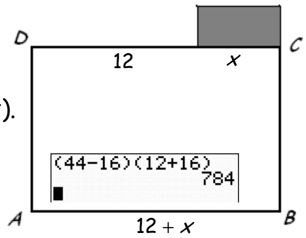
34c $2 \cdot x + BC = 18 \Rightarrow BC = 18 - 2x$ (m). $O(\text{terras}) = CD \cdot BC = x \cdot (18 - 2x)$ (m²).

34d $x \cdot (18 - 2x) = 36 \Rightarrow 18x - 2x^2 = 36 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 18x + 36 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = 6$.
$x = 3$ geeft $BC = 18 - 2 \cdot 3 = 12 \Rightarrow 3$ bij 12 (m) en $x = 6$ geeft $BC = 18 - 2 \cdot 6 = 6 \Rightarrow 6$ bij 6 (m).

34e $O = x \cdot (18 - 2x) = 18x - 2x^2 \Rightarrow O'(x) = 18 - 4x$. (je vindt één kandidaat voor het maximum $\Rightarrow$ er is alleen een maximum)
Extreem: $O'(x) = 18 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -18 \Rightarrow x = \frac{-18}{-4} = 4\frac{1}{2}$ (m) bij $BC = 18 - 2 \cdot 4\frac{1}{2} = 18 - 9 = 9$ (m).

35a $2x + DC = 40 \Rightarrow BC = 40 - 2x$ (m). $O = AD \cdot DC = x \cdot (40 - 2x)$ (m^2).

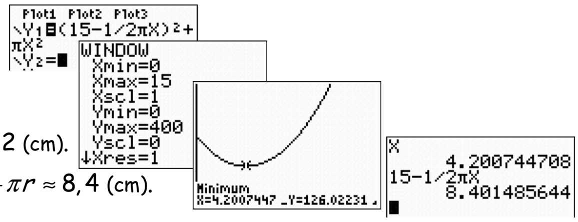
35b $O = x \cdot (40 - 2x) = 40x - 2x^2$ (met als grafiek een bergparabool $\Rightarrow$ er is een maximum) $\Rightarrow \frac{dO}{dx} = 40 - 4x$.
Extreem: $\frac{dO}{dx} = 40 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -40 \Rightarrow x = 10$ (m) en $DB = 40 - 2 \cdot 10 = 20$ (m).



36 $2AD + 12 + x + x = 100 \Rightarrow 2AD = 88 - 2x \Rightarrow AD = 44 - x$ en $O = AD \cdot AB = (44 - x) \cdot (12 + x)$.
$O = (44 - x) \cdot (12 + x) = 44 \cdot 12 + 44x - 12x - x^2 = 44 \cdot 12 + 32x - x^2 \Rightarrow \frac{dO}{dx} = 32 - 2x$.
$\frac{dO}{dx} = 32 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -32 \Rightarrow x = 16$ en $O_{max} = O(16) = (44 - 16) \cdot (12 + 16) = 748$ (m^2).

37 De oppervlakte van de dwarsdoorsnede is $O = x(25 - 2x)$.
$O = x(25 - 2x) = 25x - 2x^2$ (met als grafiek een bergparabool) $\Rightarrow \frac{dO}{dx} = 25 - 4x$.
$\frac{dO}{dx} = 25 - 4x = 0 \Rightarrow -4x = -25 \Rightarrow x = \frac{-25}{-4} = 6\frac{1}{4}$. De afmetingen zijn $25 - 2 \cdot 6\frac{1}{4} = 25 - 12\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ (cm) bij $6\frac{1}{4}$ (cm).

38 Noem de lengte van de bodem l en de breedte van de bodem b.
$2l + 2b = 50 \Rightarrow l + b = 25 \Rightarrow l = 25 - b$.
$I = l \cdot b \cdot 5 = 5b(25 - b) = 125b - 5b^2 \Rightarrow \frac{dI}{db} = 125 - 10b$.
$\frac{dI}{db} = 125 - 10b = 0 \Rightarrow 125 = 10b \Rightarrow b = \frac{125}{10} = 12\frac{1}{2}$ (cm) en $l = 25 - 12\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}$ (cm).
Het afmetingen van het oorspronkelijke karton zijn $b + 2 \cdot 5 = 12\frac{1}{2} + 10 = 22\frac{1}{2}$ (cm) bij $l + 2 \cdot 5 = 12\frac{1}{2} + 10 = 22\frac{1}{2}$ (cm).

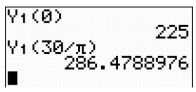


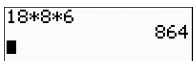
39a $4y + 2\pi r = 60 \Rightarrow 4y = 60 - 2\pi r \Rightarrow y = 15 - \frac{1}{2}\pi r$.

39b $O = y^2 + \pi r^2 = (15 - \frac{1}{2}\pi r)^2 + \pi r^2$.

39c $O = (15 - \frac{1}{2}\pi r)^2 + \pi r^2$ met de optie minimum geeft $r \approx 4{,}2$ (cm).
De oppervlakte is maximaal voor $r \approx 4{,}2$ (cm) en $y = 15 - \frac{1}{2}\pi r \approx 8{,}4$ (cm).

39d Zie de plot op het GR-scherm. (O maximaal aan de uiteinden van de grafiek $\Rightarrow r = 0$ of r maximaal)
De oppervlakte is maximaal voor de kleinst mogelijke r, dus $r = 0$ ($\Rightarrow 4y = 60 \Rightarrow y = 15$)
of voor de grootst mogelijke r, dus $r = \frac{30}{\pi}$ (want $4y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 15 - \frac{1}{2}\pi r = 0 \Rightarrow 15 = \frac{1}{2}\pi r \Rightarrow 30 = \pi r \Rightarrow r = \frac{30}{\pi}$)
$O(0) = (15 - \frac{1}{2}\pi \cdot 0)^2 + \pi \cdot 0^2 = 15^2 = 225$ (cm^2) en $O(\frac{30}{\pi}) \approx 286{,}5$ (cm^2).
Dus $O_{max} = O(\frac{30}{\pi}) \approx 286{,}5$ (cm^2). Dan is $y = 0$ (cm).

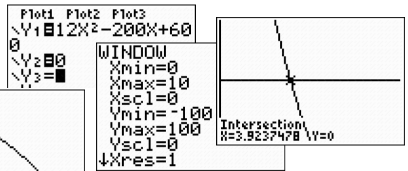


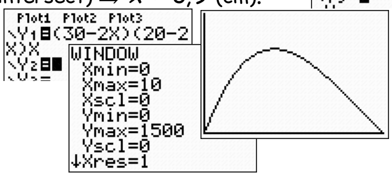


40a $x = 6 \Rightarrow I = l \cdot b \cdot h = (30 - 2 \cdot 6) \cdot (20 - 2 \cdot 6) \cdot 6 = 18 \cdot 8 \cdot 6 = 864$ (cm^3).

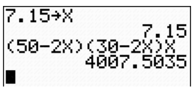
40b $I = (30 - 2x) \cdot (20 - 2x) \cdot x = (600 - 60x - 40x + 4x^2) \cdot x = (4x^2 - 100x + 600) \cdot x = 4x^3 - 100x^2 + 600x$ (cm^3).

40c $I = 4x^3 - 100x^2 + 600x \Rightarrow \frac{dI}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$. (hier gedifferentieerd)
$\frac{dI}{dx} = 12x^2 - 200x + 600 = 0$ (dit mag wel met de GR $\Rightarrow$ intersect) $\Rightarrow x \approx 3{,}9$ (cm).
I is maximaal (zie de plot hiernaast) voor $x \approx 3{,}9$ (cm).
Dus de vierkantjes zijn 3,9 (cm) bij 3,9 (cm).



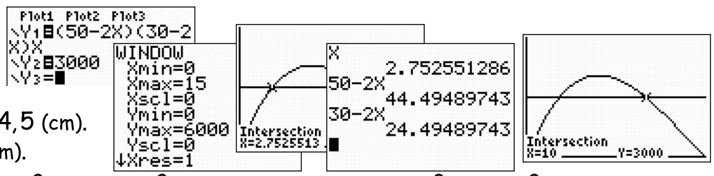


41a $I = (50 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x$ (cm^3).
Omdat $50 - 2x > 0$, $30 - 2x > 0$ en $x > 0$
ligt x tussen de grenzen 0 en 15.

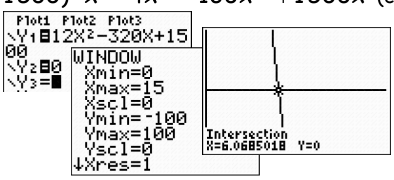


41b $x = 7{,}15 \Rightarrow I \approx 4\,007{,}5$ (cm^3).

41c $I = (50 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x = 3\,000$
met de optie intersect vind je $x \approx 2{,}8$ en $x = 10$.
$x = h \approx 2{,}8 \Rightarrow l = 50 - 2x \approx 44{,}5$ en $b = 30 - 2x \approx 24{,}5$ (cm).
$x = h = 10 \Rightarrow l = 50 - 2x = 30$ en $b = 30 - 2x = 10$ (cm).



41d $I = (50 - 2x) \cdot (30 - 2x) \cdot x = (1500 - 100x - 60x + 4x^2) \cdot x = (4x^2 - 160x + 1500) \cdot x = 4x^3 - 160x^2 + 1500x$ (cm^3).
$I = 4x^3 - 160x^2 + 1500x \Rightarrow \frac{dI}{dx} = 12x^2 - 320x + 1500$. (hier gedifferentieerd)
$\frac{dI}{dx} = 12x^2 - 320x + 1500 = 0$ (nu mag wel met de GR $\Rightarrow$ intersect) $\Rightarrow x \approx 6{,}1$ (cm).
I is maximaal (zie de plot bij 41c) voor $x \approx 6{,}1$ (cm).
Dus de vierkantjes zijn 6,1 (cm) bij 6,1 (cm).



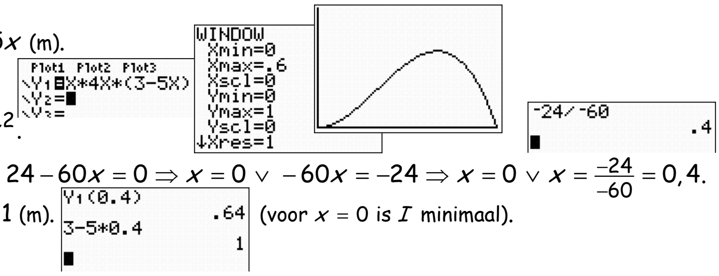
42a $4 \cdot h + 4 \cdot 4x + 4 \cdot x = 12 \Rightarrow h + 4x + x = 3 \Rightarrow h = 3 - 5x$ (m).

42b $I = x \cdot 4x \cdot h = 4x^2 \cdot (3 - 5x)$ (m^3).

42c $I = 4x^2 \cdot (3 - 5x) = 12x^2 - 20x^3 \Rightarrow \frac{dI}{dx} = 24x - 60x^2$.

$\frac{dI}{dx} = 24x - 60x^2 = 0 \Rightarrow x(24 - 60x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 24 - 60x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee -60x = -24 \Rightarrow x = 0 \vee x = \frac{-24}{-60} = 0{,}4.$

$I_{\max} = I(0{,}4) = 0{,}64$ (m^2) en $h = 3 - 5 \cdot 0{,}4 = 3 - 2 = 1$ (m). (voor $x = 0$ is I minimaal).

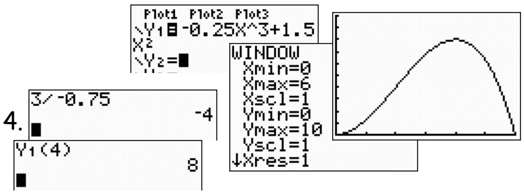


43a $O = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x_Q \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-0{,}5p^2 + 3p) = -0{,}25p^3 + 1{,}5p^2$.

43b $O = -0{,}25p^3 + 1{,}5p^2 \Rightarrow \frac{dO}{dp} = -0{,}75p^2 + 3p$.

43c $\frac{dO}{dp} = -0{,}75p^2 + 3p = 0 \Rightarrow -0{,}75p(p - 4) = 0 \Rightarrow p = 0$ (voldoet niet) $\vee\ p = 4$.

De maximale (zie een plot) oppervlakte is $O(4) = -0{,}25 \cdot 4^3 + 1{,}5 \cdot 4^2 = 8$.

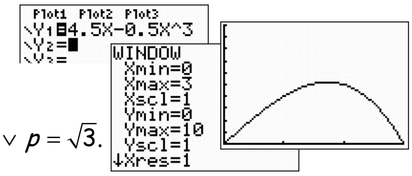


44 $O = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x_Q \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (9 - p^2) = 4{,}5p - 0{,}5p^3$.

$O = 4{,}5p - 0{,}5p^3 \Rightarrow \frac{dO}{dp} = 4{,}5 - 1{,}5p^2$.

$\frac{dO}{dp} = 4{,}5 - 1{,}5p^2 = 0 \Rightarrow -1{,}5p^2 = -4{,}5 \Rightarrow p^2 = 3 \Rightarrow p = -\sqrt{3}$ (voldoet niet) $\vee\ p = \sqrt{3}$.

De maximale (zie een plot) oppervlakte is $O(\sqrt{3}) = 4{,}5 \cdot \sqrt{3} - 0{,}5 \cdot \sqrt{3}^3 = 4{,}5 \cdot \sqrt{3} - 1{,}5 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.



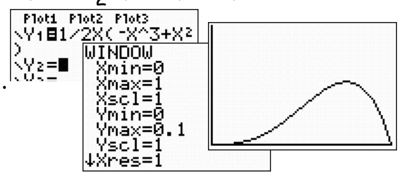
45 Het verschil van de oppervlakten van ΔOPR en ΔOPQ is $O = O(\Delta OPR) - O(\Delta OPQ) = O(\Delta OQR)$.

$O = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot QR = \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot (y_R - y_Q) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (1 - p^3 - (1 - p^2)) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (1 - p^3 - 1 + p^2) = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-p^3 + p^2)$.

$O = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (-p^3 + p^2) = -0{,}5p^4 + 0{,}5p^3 \Rightarrow \frac{dO}{dp} = -2p^3 + 1{,}5p^2$.

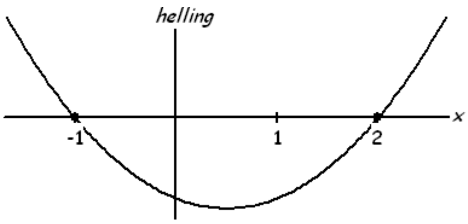
$\frac{dO}{dp} = -2p^3 + 1{,}5p^2 = 0 \Rightarrow p^2(-2p + 1{,}5) = 0 \Rightarrow p = 0$ (vold. niet) $\vee\ p = \frac{-1{,}5}{-2} = \frac{3}{4}$.

De oppervlakte is maximaal (zie een plot) voor $x = \frac{3}{4}$.

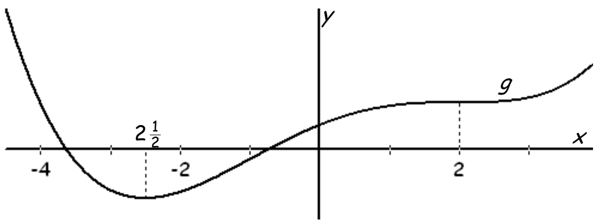


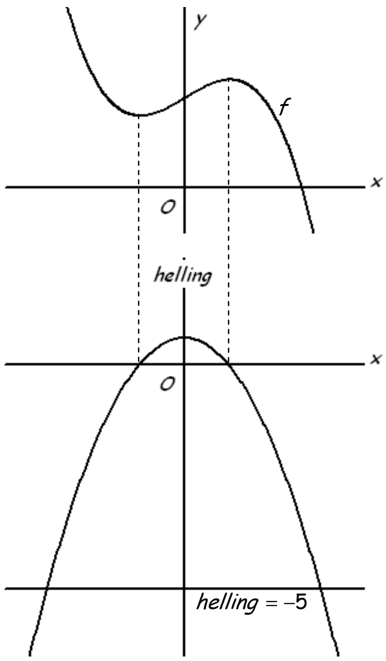
Diagnostische toets

D1a

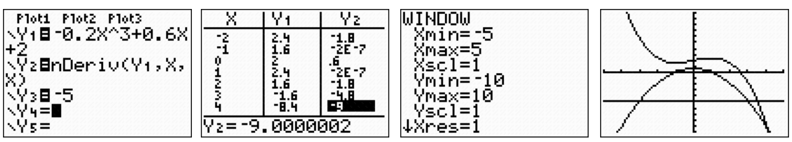


D1b





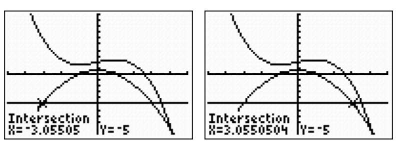
D2a



Zie een schets van de grafiek van f rechts hierboven met daaronder een schets van zijn hellinggrafiek.
(gebruik eventueel een plot en TABLE op de GR)

D2b helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=4} = \text{nDeriv}(-0.2x^3 + 0.6x + 2, x, 4) = y_2(4) = -9$. (zie TABLE)

D2c helling $= \left[\frac{dy}{dx}\right] = y_2(x) = -5$ met de optie intersect geeft $x \approx -3{,}06 \ \vee\ x \approx 3{,}06$.



D3a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 6x$.

D3b $g(p) = 4p^3 + \frac{1}{6}p^2 - 11p + 20 \Rightarrow g'(p) = 12p^2 + \frac{1}{3}p - 11$.

D3c $h(q) = 3q - 2(q^2 - 4q) = 3q - 2q^2 + 8q = -2q^2 + 11q \Rightarrow h'(q) = -4q + 11$.

D3d $k(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow k'(x) = 2ax + b$.

D4a $f(x) = (3 - x)(5 + 2x) = 15 + 6x - 5x - 2x^2 = -2x^2 + x + 15 \Rightarrow f'(x) = -4x + 1$.

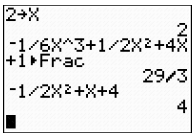
D4b $g(x) = (3x + 1)^2 = (3x + 1)(3x + 1) = 9x^2 + 3x + 3x + 1 = 9x^2 + 6x + 1 \Rightarrow g'(x) = 18x + 6$.

D4c $h(x) = x(2x - 1)^2 = x(2x - 1)(2x - 1) = x(4x^2 - 2x - 2x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$.

D4d $v(x) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + at + b \Rightarrow v'(t) = t^2 + 4t + a$.

D5a $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$. Stel k: $y = ax + b$ met $y_A = f(2) = \frac{29}{3}$ en $a = f'(2) = 4$.

$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ \text{door } A(2, 9\tfrac{2}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow 9\frac{2}{3} = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow 9\frac{2}{3} - 8 = b \Rightarrow b = 1\frac{2}{3}$. De raaklijn in A is k: $y = 4x + 1\frac{2}{3}$.

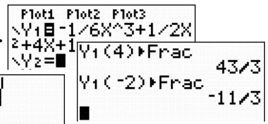


D5b $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

$\text{rc}_l = \text{rc}_k = 4 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$ (met $x_A = 0$) $\Rightarrow x_B = 0$ met $y_B = f(0) = 1$.

D5c $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$ (helling = 0) $\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$.

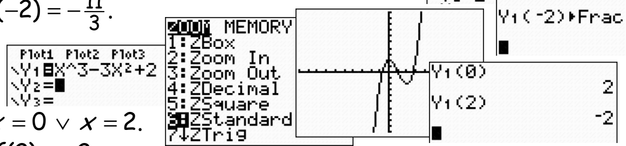
$x_C = 4$ geeft $y_C = f(4) = \frac{43}{3}$ en $x_D = -2$ geeft $y_D = f(-2) = -\frac{11}{3}$.



D6a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$.

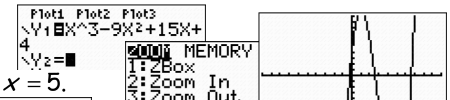
maximum (zie een plot) $f(0) = 2$ en minimum (zie een plot) $f(2) = -2$.

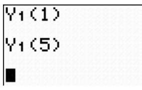


D6b $g(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 4 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 18x + 15$.

$g'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 5$.

maximum (zie een plot) $g(1) = 11$ en minimum (zie een plot) $g(5) = -21$.

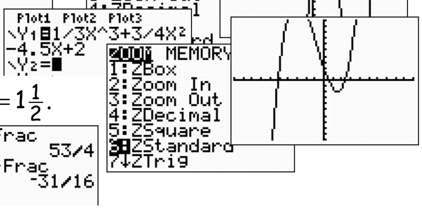




D7a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow f'(x) = x^2 + 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}$.

$f'(x)) = x^2 + 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2} = 0$ (abc-formule of) $\Rightarrow (x + 3)(x - 1\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 1\frac{1}{2}$.

maximum (zie een plot) $f(-3) = \frac{53}{4}$ en minimum (zie een plot) $f(1\frac{1}{2}) = -\frac{31}{16}$.



D7b $f(x) = p$ heeft drie oplossingen (zie een plot en D7a) voor $-\frac{31}{16} < p < \frac{53}{4}$.

D8 $AB + 3x = 600 \Rightarrow AB = 600 - 3x$.

$O = x \cdot AB \Rightarrow x(600 - 3x) = 600x - 3x^2 \Rightarrow \frac{dO}{dx} = 600 - 6x$.

$\frac{dO}{dx} = 600 - 6x = 0 \Rightarrow 600 = 6x \Rightarrow x = 100$

$O = 600x - 3x^2$ (met als grafiek een bergparabool) is maximaal voor $x = AD = 100$ (m) en $AB = 600 - 3 \cdot 100 = 300$ (m).

D9a $I = (60 - 2x) \cdot (40 - 2x) \cdot x = (2\,400 - 120x - 80x + 4x^2) \cdot x = (4x^2 - 200x + 2\,400) \cdot x = 4x^3 - 200x^2 + 2\,400x$.

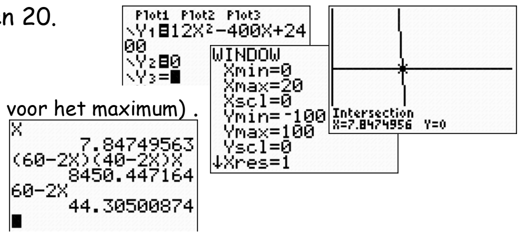
Omdat $60 - 2x > 0$, $40 - 2x > 0$ en $x > 0$ ligt x tussen de grenzen 0 en 20.

D9b $I = 4x^3 - 200x^2 + 2\,400x \Rightarrow \frac{dI}{dx} = 12x^2 - 400x + 2\,400$.

$\frac{dI}{dx} = 12x^2 - 400x + 2\,400 = 0$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 7{,}847$ (de enige kandidaat voor het maximum).

De maximale inhoud is (ongeveer) 8 450 (cm^3) bij de hoogte $x \approx 7{,}8$ (cm).

De lengte is $60 - 2x \approx 44{,}3$ (cm) en de breedte is $40 - 2x \approx 24{,}3$ (cm).



D10 $O = \frac{1}{2} \cdot OQ \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot x_Q \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot p \cdot (p^2 - 4p + 5) = \frac{1}{2}p^3 - 2p^2 + 2\frac{1}{2}p$.

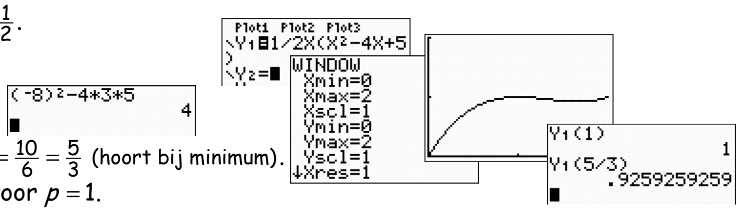
$O = \frac{1}{2}p^3 - 2p^2 + 2\frac{1}{2}p \Rightarrow \frac{dO}{dp} = 1\frac{1}{2}p^2 - 4p + 2\frac{1}{2}$.

$\frac{dO}{dp} = 1\frac{1}{2}p^2 - 4p + 2\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 3p^2 - 8p + 5 = 0$

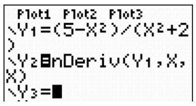
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 - 60 = 4$, dus $\sqrt{D} = 2$

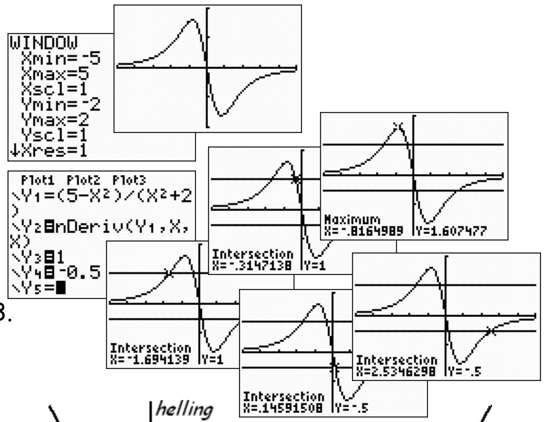
$p = \frac{8-2}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$ (hoort bij maximum) $\vee$ $p = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ (hoort bij minimum).

Dus de oppervlakte is maximaal (zie een plot) voor $p = 1$.



Gemengde opgaven 6. De afgeleide functie



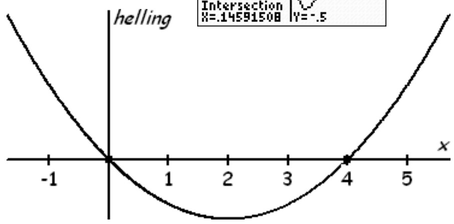


G11a Voer in op de GR $y_1 = f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2}$
(zet deze uit door op = te gaan staan en ENTER)
en voer ook in $y_2 = f'(x) \approx \text{nDeriv}(y_1, x, x)$.
Maak een schets van de hellinggrafiek (zie de plot hiernaast).

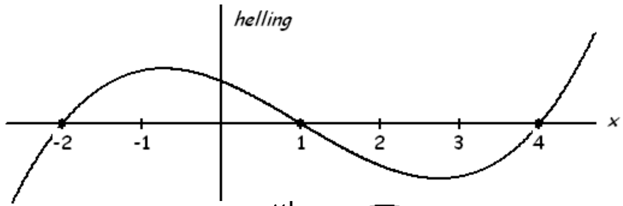
G11b De hellling $f'(x) = 1$ geeft met intersect $x \approx -1{,}69 \vee x \approx -0{,}31$.

G11c De optie maximum loslaten op $f'(x)$ geeft $x \approx -0{,}82$.

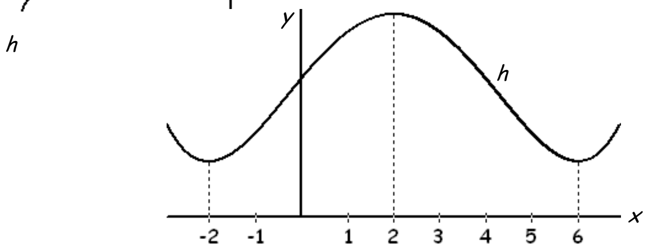
G11d De hellling $f'(x) = -0{,}5$ geeft met intersect $x \approx 0{,}15 \vee x \approx 2{,}53$.
Nu aflezen in een plot: $f'(x) < -0{,}5$ voor $0{,}15 < x < 2{,}53$.



G12a De hellling van de grafiek van f is nul voor $x = 0$ en $x = 4$.
(de hellinggrafiek van f gaat door de x-as bij $x = 0$ en $x = 4$)
De grafiek van f daalt (de helling is negatief) voor $0 < x < 4$.
(de hellinggrafiek van f ligt onder de x-as voor $0 < x < 4$)
De grafiek van f stijgt (de helling is positief) voor $x < 0$ en $x > 4$.
(de hellinggrafiek van f ligt boven de x-as voor $x < 0$ en $x > 4$)
Zie een schets van de hellinggrafiek van f hiernaast.



De hellling van g is nul voor $x = -2,\ x = 1$ en $x = 4$.
(de hellinggrafiek door de x-as bij $x = -2,\ x = 1$ en $x = 4$)
De grafiek van g daalt voor $x < -2$ en $1 < x < 4$.
(de hellinggrafiek ligt onder de x-as voor $x < -2$ en $0 < x < 4$)
De grafiek van g stijgt voor $-2 < x < 1$ en $x > 4$.
(de hellinggrafiek ligt boven de x-as voor $-2 < x < 1$ en $x > 4$)
Zie een schets van de hellinggrafiek van g hiernaast.



G12b De hellling is nul voor $x = -2,\ x = 2$ en $x = 6$.
(de grafiek van h heeft extremen voor $x = -2,\ x = 2$ en $x = 6$)
De helling is negatief voor $x < -2$ en $2 < x < 6$.
(de grafiek van h daalt voor $x < -2$ en $2 < x < 6$)
De helling is positief voor $-2 < x < 2$ en $x > 6$.
(de grafiek van h stijgt voor $-2 < x < 2$ en $x > 6$)
Zie een schets van en mogelijke grafiek van h hiernaast.

G13a $f(x) = -x(2x-7) = -2x^2 + 7x \Rightarrow f'(x) = -4x + 7$.

G13b $g(x) = (x^2-1)(x-1) = x^3 - x^2 - x + 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 + 0 = 3x^2 - 2x - 1$.

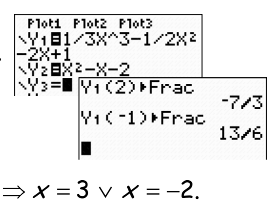
G13c $h(x) = x(3x+2)^2 = x(3x+2)(3x+2) = x(9x^2 + 6x + 6x + 4) = 9x^3 + 12x^2 + 4x \Rightarrow h'(x) = 27x^2 + 24x + 4$.

G13d $m(t) = 7 - \frac{t^2+8t}{16} = 7 - \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{2}t \Rightarrow m'(t) = 0 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}t - \frac{1}{2}$.

G14a $K(x) = 4ax^2 - a^2x \Rightarrow \frac{dK}{dx} = 8ax - a^2$. $\quad K(a) = 4ax^2 - a^2x \Rightarrow \frac{dK}{da} = 4x^2 - 2ax$.

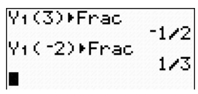
G14b $l(p) = 3p^2 - 2pq + q^3 \Rightarrow \frac{dl}{dp} = 6p - 2q + 0 = 6p - 2q$. $\quad l(q) = 3p^2 - 2pq + q^3 \Rightarrow \frac{dl}{dq} = 0 - 2p + 3q^2 = -2p + 3q^2$.

G15a $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 - x - 2$.
(de grafiek van) f snijden met de y-as ($x = 0$) $\Rightarrow x_A = 0$ en $y_A = f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(0) = 0^2 - 0 - 2 = -2$.
$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$. De raaklijn in A is k: $y = -2x + 1$.



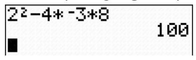
G15b $\text{rc}_{\text{raaklijn}} = f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = -1$.
$x_{P_1} = 2$ en $y_{P_1} = f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -2\frac{1}{3}$. Dus $P_1(2,\ -2\frac{1}{3})$.
$x_{P_2} = -1$ en $y_{P_2} = f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2\frac{1}{6}$. Dus $P_2(-1,\ 2\frac{1}{6})$.

G15c $\text{rc}_{\text{raaklijn}} = f'(x) = 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$.
$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = -\frac{1}{2}$. Dus $B(3,\ -\frac{1}{2})$.
$x_C = -2$ en $y_C = f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 1 = \frac{1}{3}$. Dus $C(-2,\ \frac{1}{3})$.

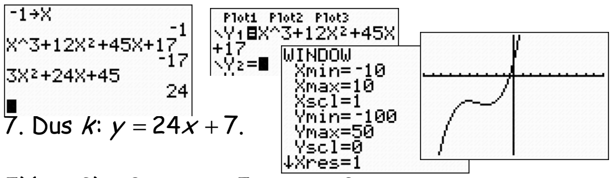


G16a $f(x)=(x^2+2)(1-x)=x^2-x^3+2-2x=-x^3+x^2-2x+2 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+2x-2.$
Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(2)=-3\cdot 2^2+2\cdot 2-2=-12+4-2=-10$ en $y_A=f(2)=(2^2+2)(1-2)=6\cdot -1=-6.$
$\left.\begin{array}{l} y=-10x+b \\ \text{door } A(2,\ -6)\end{array}\right\} \Rightarrow -6=-10\cdot 2+b \Rightarrow -6+20=b \Rightarrow b=14.$ De raaklijn in A is k: $y=-10x+14.$

G16b $f'(x)=-10 \Rightarrow -3x^2+2x-2=-10 \Rightarrow -3x^2+2x+8=0$ met $D=2^2-4\cdot -3\cdot 8=4+98=100,$ dus $\sqrt{D}=10.$
$x=\frac{-2-10}{2\cdot -3}=\frac{-12}{-6}=2=x_A \vee x=\frac{-2+10}{-6}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}=x_B.$

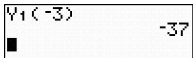


G17a $f(x)=x^3+12x^2+45x+17 \Rightarrow f'(x)=3x^2+24x+45.$
Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(-1)=24$ en $y_A=f(-1)=-17.$
$\left.\begin{array}{l} y=24x+b \\ \text{door } A(-1,\ -17)\end{array}\right\} \Rightarrow -17=24\cdot -1+b \Rightarrow -17+24=b \Rightarrow b=7.$ Dus k: $y=24x+7.$



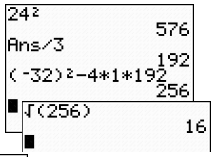
G17b $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+24x+45=0 \Rightarrow x^2+8x+15=0 \Rightarrow (x+5)(x+3)=0 \Rightarrow x=-5 \vee x=-3.$
maximum (zie een plot) $f(-5)=-33$

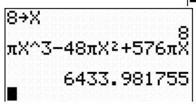
en minimum (zie een plot) $f(-3)=-37.$



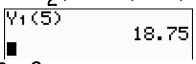
G17c $f(x)=p$ heeft drie oplossingen (zie de schets en gebruik G17b) voor $-37<p<-33.$

G18a $I=\pi r^2 h=\pi(24-h)^2\cdot h=\pi h(24-h)(24-h)=\pi h(576-24h-24h+h^2)=\pi h^3-48\pi h^2+576\pi h.$
G18b $I=\pi h^3-48\pi h^2+576\pi h \Rightarrow \frac{dI}{dh}=3\pi h^2-96\pi h+576\pi.$
$\frac{dI}{dh}=0 \Rightarrow 3\pi h^2-96\pi h+576\pi=0 \Rightarrow h^2-32h+192=0$ met $D=256,$ dus $\sqrt{D}=16.$
$h=\frac{32-16}{2\cdot 1}=\frac{16}{2}=8$ (zoeken we) $\vee$ $h=\frac{32+16}{2}=\frac{48}{2}=24$ (zoeken we niet, want dan is $r=0$).
De maximale inhoud is $I(8)\approx 6\,434$ (cm^3).

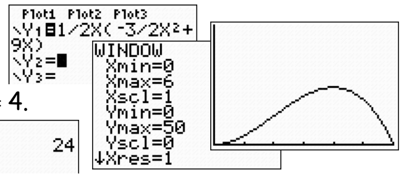


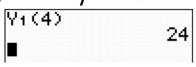


G19a $O=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h=\frac{1}{2}\cdot(y_A-y_B)\cdot x_A=\frac{1}{2}\cdot(6p-p^2-(\frac{1}{2}p^2-3p))\cdot p=\frac{1}{2}p(6p-p^2-\frac{1}{2}p^2+3p)=\frac{1}{2}p(-1\frac{1}{2}p^2+9p).$
$p=5 \Rightarrow O=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(-1\frac{1}{2}\cdot 5^2+9\cdot 5)=18{,}75.$

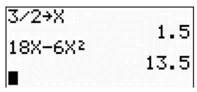


G19b $O=\frac{1}{2}p(-1\frac{1}{2}p^2+9p)=\frac{3}{4}p^3+\frac{9}{2}p^2 \Rightarrow \frac{dO}{dx}=\frac{9}{4}p^2+9p.$
$\frac{dO}{dx}=0 \Rightarrow \frac{9}{4}p^2+9p=0 \Rightarrow 9p^2+36p=0 \Rightarrow 9p(p+4)=0 \Rightarrow p=0 \vee p=4.$
$p=4$ geeft de maximale (zie een plot) oppervlakte $O(4)=24.$

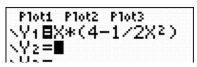




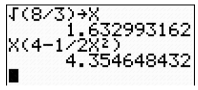
G20a $\left.\begin{array}{l} a=1=x_A=x_D \Rightarrow y_D=2\cdot 1=2 \\ y_C=y_D=2 \Rightarrow 2=9-x_C \Rightarrow x_C=7=x_B\end{array}\right\} \Rightarrow O(ABCD)=AB\cdot AD=(x_B-x_A)\cdot y_D=(7-1)\cdot 2=6\cdot 2=12.$
G20b $x_A=x_D=a \Rightarrow y_D=2a$
$y_C=y_D=2a \Rightarrow 2a=9-x_C \Rightarrow x_C=9-2a=x_B$
$ABCD$ is een vierkant $\Rightarrow AB=AD \Rightarrow x_B-x_A=y_D \Rightarrow 9-2a-a=2a \Rightarrow 9=5a \Rightarrow a=\frac{9}{5}=\frac{18}{10}=1{,}8.$
G20c $O(ABCD)=AB\cdot AD=(x_B-x_A)\cdot y_D=(9-3a)\cdot 2a=18a-6a^2 \Rightarrow \frac{dO}{dx}=18-12a.$
$\frac{dO}{dx}=0 \Rightarrow 18-12a=0 \Rightarrow -12a=-18 \Rightarrow a=\frac{-18}{-12}=\frac{3}{2}=1{,}5.$
De maximale (de grafiek van O is een bergparabool) oppervlakte van rechthoek $ABCD$ is $O(1{,}5)=13{,}5.$



G21a $Omtrek=2\cdot OP+2\cdot PQ=2\cdot x_P+2\cdot y_Q=2\cdot p+2\cdot(4-\frac{1}{2}p^2)=2p+8-p^2.$
$Omtrek=2p+8-p^2 \Rightarrow \frac{dOmtrek}{dp}=2-2p.$
$\frac{dOmtrek}{dp}=0 \Rightarrow 2-2p=0 \Rightarrow -2p=-2 \Rightarrow p=1.$
De maximale (de grafiek van P is een bergparabool) omtrek van rechthoek $PQRS$ is $Omtrek(1)=2+8-1=9.$
G21b $O=OP\cdot PQ=x_P\cdot y_Q=p\cdot(4-\frac{1}{2}p^2)=4p-\frac{1}{2}p^3.$
$O=4p-\frac{1}{2}p^3 \Rightarrow \frac{dO}{dp}=4-1\frac{1}{2}p^2.$



$\frac{dO}{dp}=0 \Rightarrow 4-1\frac{1}{2}p^2=0 \Rightarrow -1\frac{1}{2}p^2=-4 \Rightarrow 3p^2=8 \Rightarrow p^2=\frac{8}{3} \Rightarrow p=-\sqrt{\frac{8}{3}}$ (voldoet niet) $\vee$ $p=\sqrt{\frac{8}{3}}$ (zoeken we).
De maximale (er is maar een kandidaat) oppervlakte van rechthoek $PQRS$ is $O(\sqrt{\frac{8}{3}})\approx 4{,}35.$



G22a $y_B=3 \Rightarrow -\frac{1}{16}x^2+x=3 \Rightarrow x^2-16x=-48 \Rightarrow x^2-16x+48=0 \Rightarrow (x-4)(x-12)=0 \Rightarrow x=4 \vee x=12.$
$B(4,3)$ geeft $O(\Delta OAB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=2\cdot 3=6$ en $B(12,3)$ geeft $O(\Delta OAB)=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3=6\cdot 3=18.$

G22b $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot x_A \cdot y_B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (-\frac{1}{16}a^2 + a) = -\frac{1}{32}a^3 + \frac{1}{2}a^2.$

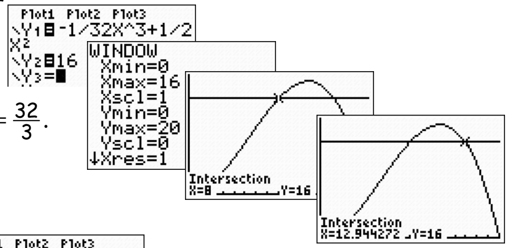
G22c $O = -\frac{1}{32}a^3 + \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow \frac{dO}{da} = -\frac{3}{32}a^2 + a.$

$\frac{dO}{da} = 0 \Rightarrow -\frac{3}{32}a^2 + a = 0 \Rightarrow a(-\frac{3}{32}a + 1) = 0 \Rightarrow$

$a = 0$ (geeft $O = 0$, dus zoeken we niet) $\vee\ -\frac{3}{32}a = -1 \Rightarrow 3a = 32 \Rightarrow a = \frac{32}{3}.$

G22d $O = -\frac{1}{32}a^3 + \frac{1}{2}a^2 = 16$ (algebraïsch niet op te lossen)

intersect $\Rightarrow a = 8 \vee a \approx 12{,}9.$



G23a $f(x) = -x^3 + 27x + 44 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 27.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_A = -3 \vee x_B = 3.$

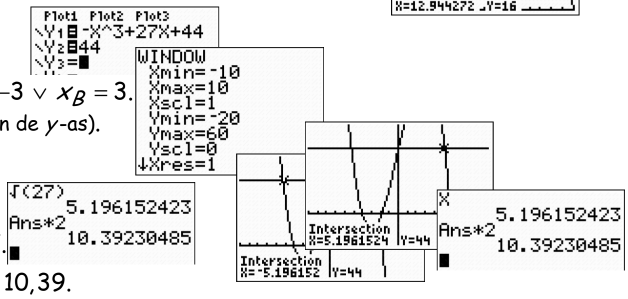
Dus A en B liggen even ver van de y-as (beide op afstand 3 van de y-as).

G23b $f(0) = -0^3 + 27 \cdot 0 + 44 = 44.$

$f(x) = -x^3 + 27x + 44 = 44$ (intersect of)

$-x^3 + 27x = 0 \Rightarrow -x(x^2 - 27) = 0 \Rightarrow x = 0 = x_Q \vee x^2 = 27.$

Dus $x_P = -\sqrt{27}$ en $x_R = \sqrt{27} \Rightarrow PR = \sqrt{27} - -\sqrt{27} = 2\sqrt{27} \approx 10{,}39.$



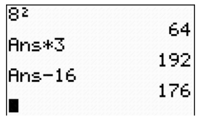
G23c $h(x) = (x+4)(p + 4x - x^2) = px + 4x^2 - x^3 + 4p + 16x - 4x^2 = -x^3 + (16 + p)x + 4p.$

$h(x) \equiv f(x) \Rightarrow -x^3 + (16 + p)x + 4p \equiv -x^3 + 27x + 44$

Er moet dan gelden $16 + p = 27$ en tegelijkertijd $4p = 44$

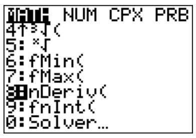
Dus er moet dan gelden $p = 11$ en tegelijkertijd $p = 11$. Dus het klopt voor $p = 11$.

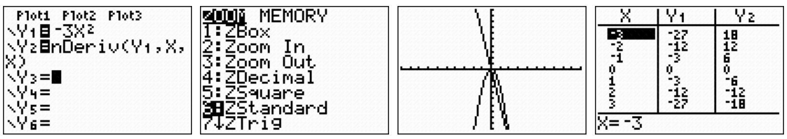
G23d $x_B = \sqrt{\frac{p+16}{3}} = 8$ (onder het $\sqrt{\ }$-teken moet dan 64 staan) $\Rightarrow \frac{p+16}{3} = 64 \Rightarrow p + 16 = 192 \Rightarrow p = 176.$



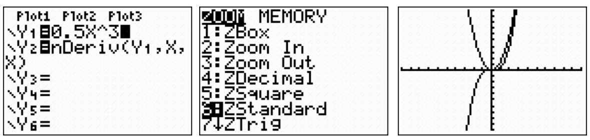
TI-84 7. Hellinggrafieken

1a Zie de plot hieronder. (nDeriv krijg je met MATH 8; , is de toets boven 7)

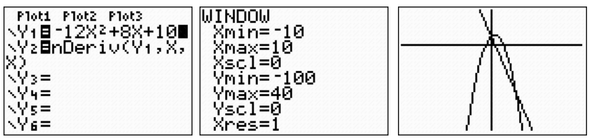




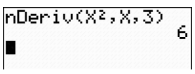
1b Zie de plot hieronder.



1c Zie de plot hieronder.



2a $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = \text{nDeriv}(x^2, x, 3) = 6.$



2b $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=5} = \text{nDeriv}(-x^2 + 3x, x, 5) = -7.$

2c $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=-3} = \text{nDeriv}(0.5x^3 + 3x^2 - 5x, x, -3) = -9{,}5.$